3.5 Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

Die Vektoren $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ ($n \in \mathbb{N}$) sind **linear abhängig**, wenn es reelle Zahlen $r_1, r_2, \dots, r_n$ gibt, die nicht alle gleich 0 sind, sodass gilt:

$$r_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + r_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \dots + r_n \cdot \overrightarrow{a_n} = \vec{0}$$

Sie sind **linear unabhängig**, wenn die obige Gleichung nur die triviale Lösung $r_1 = r_2 = \dots = r_n = 0$ besitzt.

1) zwei Vektoren:

- $\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ Prüfe, ob sich der eine Vektor durch den anderen darstellen lässt.

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow r = -3 \\ \rightarrow r = -3 \\ \rightarrow r = -3 \end{matrix}$$ => lin. abh.

Sind zwei Vektoren **linear abhängig,** verlaufen sie **parallel** zueinander. Man sagt: Die Vektoren sind **kollinear.**

2) drei Vektoren:

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 2r \quad + 4t = 0 \\ \text{II} & r - s + 2t = 0 \\ \underline{\text{III}} & \underline{r \qquad\quad = 0} \\ & t = 0, s = 0 \end{array}$$

→ **homogenes LGS** (auf rechter Seite nur „0“)

=> lin. unabh.

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{lll} \text{I} & 2r - 2s + 3t = 0 & \\ \text{II} & r + 6s + 5t = 0 & /\cdot 2 \\ \underline{\text{III}} & \underline{2s + t = 0} & /\cdot 7 \\ \text{II‘} & 2r + 12s + 10t = 0 & \\ \text{I-II‘:} & -14s - 7t = 0 & \\ \underline{\text{III‘:}} & \underline{14s + 7t = 0} & \\ \text{II‘‘+III‘} & 0 = 0 \text{ w.A.} & \end{array}$$

Wähle z.B. $s = 1$: II $2 + t = 0 \rightarrow t = -2, r = 4$

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ => lin. abh.

Sind drei Vektoren **linear abhängig,** liegen sie in derselben Ebene. Man sagt: Die Vektoren sind **komplanar.**