Stetigkeit von Funktionen

Eine Funktion, die **an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs stetig** ist, heißt stetige Funktion.

Eine Funktion $f(x)$ ist **an einer Stelle x_0 stetig**, wenn

[1] $f(x_0)$ definiert ist

[2] $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert

[3] $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Anmerkung zu [1]

Wenn f in x_0 nicht definiert ist, so ist es sinnlos zu fragen, ob f in x_0 stetig ist.

Eine Funktion $f(x)$ ist **an einer Stelle x_0 unstetig**, wenn

[1] $f(x_0)$ definiert ist

und mindestens eine der beiden folgenden Aussagen zutrifft

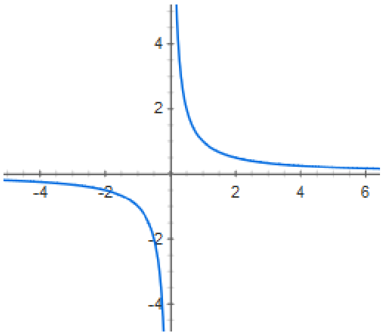
[2] $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert nicht

[3] $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

Beispiele:

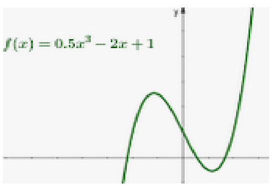
$f(x) = \frac{1}{x}$ DB: $x \in R; x \neq 0$

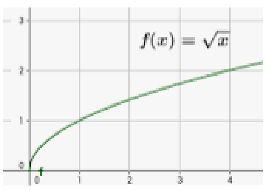
f ist auf seinem DB stetig. (Da die 0 nicht mit dazugehört)

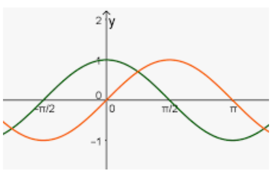


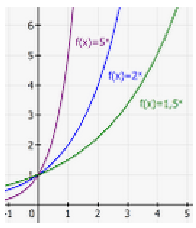
Liste stetiger Funktionen	*Beispiele*
Rationale Funktionen*	$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ für $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
Wurzelfunktionen	$f(x) = \sqrt[n]{x^m}$ für $\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$
Trigonometrische Funktionen (und ihre Umkehrfunktionen)	$f(x) = \sin(x)$ für $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
Exponentialfunktionen	$f(x) = a^x$ für $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$
Logarithmusfunktionen	$f(x) = \log_a x$ für $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$ und $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$

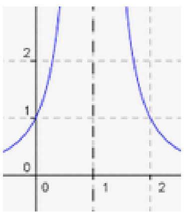
* Zu den rationalen Funktionen gehören sowohl ganzrationale (wie lineare Funktionen, quadratische Funktionen und Potenzfunktionen) als auch gebrochenrationalen Funktionen.



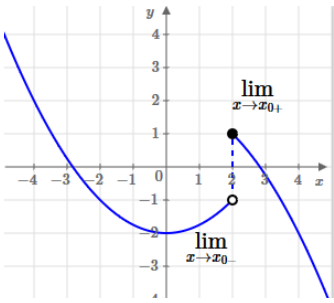








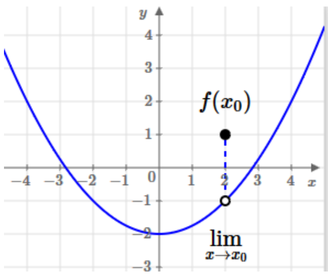
Beispiele:



Aussage [2] veranschaulicht

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert nicht

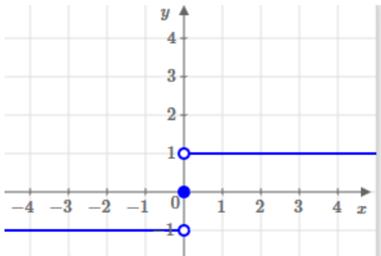
In der Abbildung lässt sich leicht erkennen, dass der linksseitige Grenzwert (Annäherung an den weißen Punkt) und der rechtsseitige Grenzwert (Annäherung an den schwarzen Punkt) nicht übereinstimmen. Der beidseitige Grenzwert $x \to x_0$ existiert folglich nicht.



Aussage [3] veranschaulicht

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

In der Abbildung lässt sich leicht erkennen, dass der Grenzwert (sowohl der links- als auch der rechtsseitige Grenzwert nähern sich dem weißen Punkt an) nicht dem Funktionswert (schwarzer Punkt) an dieser Stelle entspricht.



Die Abbildung zeigt den Graphen der Signumfunkion.

Die Signumfunktion ist eine Funktion, die einer reellen Zahl ihr Vorzeichen zuordnet:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ +1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

1. $f(x_0) = 0$

2. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -1$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +1$

Grenzwert existiert nicht

Die Signumfunktion ist an der Stelle x=0 nicht stetig.